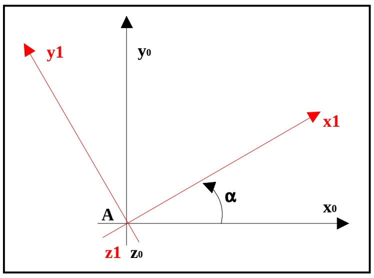
TD1 : Bras manipulateur
Eléments de correction

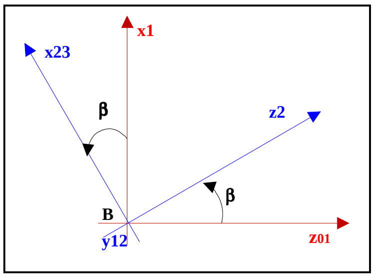
1. PRESENTATION DES MOBILITES

Liaison pivot d'axe $(A,\vec{z}_{10})$



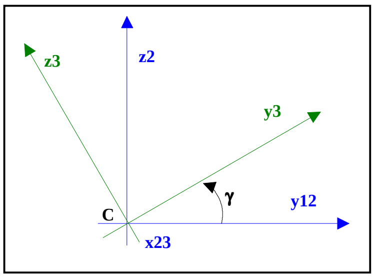
Dans un mouvement en rotation autour de l'axe $(A,\vec{z}_{10})$ du repère $R_1(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$ par rapport au repère $R_0(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$, tel que l'angle $\alpha(t)$ est défini par $(\vec{x}_0,\vec{x}_1)$, le vecteur rotation $\overrightarrow{\Omega_{R1/R0}} = \dot{\alpha}\,\overrightarrow{z_{10}}$.

Liaison pivot d'axe $(B,\vec{y}_{12})$



Dans un mouvement en rotation autour de l'axe $(B,\vec{y}_{12})$ du repère $R_2(\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$ par rapport au repère $R_1(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$, tel que l'angle $\beta(t)$ est défini par $(\vec{x}_1,\vec{x}_{23})$, le vecteur rotation $\overrightarrow{\Omega_{R2/R1}} = \dot{\beta}\,\overrightarrow{y_{12}}$.

Liaison pivot d'axe $(C,\overrightarrow{x_{23}})$



Dans un mouvement en rotation autour de l'axe $(C,\overrightarrow{x_{23}})$ du repère $R_3(\vec{x}_3,\vec{y}_3,\vec{z}_3)$ par rapport au repère $R_2(\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$, tel que l'angle $\beta(t)$ est défini par $(\overrightarrow{y_{12}},\overrightarrow{y_3})$, le vecteur rotation $\overrightarrow{\Omega_{R3/R2}} = \dot{\gamma}\,\overrightarrow{x_{23}}$.

2. REPONSE A LA QUESTION 2-1

$$\{V_{R1/R0}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{R1/R0}} \\ \overrightarrow{V_{A\in R1/R0}} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{R1/R0}} = \dot{\alpha}\,\vec{z}_{01} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{Bmatrix}_{A,(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_{10})} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{Bmatrix}_{A,R_{10}}$$

3. REPONSE A LA QUESTION 2-2

$$\{V_{R2/R1}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{R2/R1}} \\ \overrightarrow{V_{A\in R2/R1}} \end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{R2/R1}} = \dot{\beta}.\vec{y}_{12} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \dot{\beta} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{B,(-,\vec{y}_{12},-)} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \dot{\beta} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{B,R_{12}} =$$

4. REPONSE A LA QUESTION 2-3

$$\left\{V_{R3/R2}\right\} = \left\{\begin{matrix} \overrightarrow{\Omega_{R3/R2}} \\ \overrightarrow{V_{A\in R3/R2}} \end{matrix}\right\}_B = \left\{\begin{matrix} \overrightarrow{\Omega_{R3/R2}} = \dot{\gamma}.\vec{x}_{23} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_B = \left\{\begin{matrix} \dot{\gamma} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_{B,\left(\vec{x}_{23},-,-\right)} = \left\{\begin{matrix} \dot{\gamma} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_{B,R_{23}}$$

5. REPONSE A LA QUESTION 2-4

$$\left\{V_{R1/R0}\right\} = \left\{\begin{matrix} \overrightarrow{\Omega_{R1/R0}} = \dot{\alpha}.\vec{z}_{01} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_A = \left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \dot{\alpha} & 0 \end{matrix}\right\}_{A,R_{10}} = \left\{\begin{matrix} \overrightarrow{\Omega_{R1/R0}} \\ \overrightarrow{V_{B\in R1/R0}} = \overrightarrow{V_{A\in R1/R0}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{R1/R0i}} \end{matrix}\right\}_B$$

$$\text{et } \overrightarrow{V_{B\in R1/R0}} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{R_1} + \begin{vmatrix} -h \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{R_1} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{vmatrix}_{R_1} = \begin{vmatrix} 0 \\ h.\dot{\alpha} \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\left\{V_{R1/R0}\right\} = \left\{\begin{matrix} \overrightarrow{\Omega_{R1/R0}} = \dot{\alpha}.\vec{z}_{01} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_A == \left\{\begin{matrix} \overrightarrow{\Omega_{R1/R0}} \\ \overrightarrow{V_{B\in R1/R0}} \end{matrix}\right\}_B == \left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & h.\dot{\alpha} \\ \dot{\alpha} & 0 \end{matrix}\right\}_{B,R_1} \quad \text{d'où } \overrightarrow{V_{B\in R1/R0}} = h.\dot{\alpha}.\vec{y}_{12}}$$

En passant par la dérivée du vecteur position, on a trouvé : $\boxed{\overrightarrow{V_{B\in R1/R0}} = \left(\dfrac{d\,\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{R0} = h\dot{\alpha}.\vec{y}_{12}}$

(voir TD1 outils mathématiques utiles en mécanique). Comparer la quantité de lignes à écrire.

6. REPONSE A LA QUESTION 2-5

$$\left\{V_{R2/R1}\right\} = \left\{\begin{matrix} \overrightarrow{\Omega_{R2/R1}} \\ \overrightarrow{V_{B\in R2/R1}} \end{matrix}\right\}_B = \left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ \dot{\beta} & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_{B,R_{12}} = \left\{\begin{matrix} \overrightarrow{\Omega_{R1/R0}} \\ \overrightarrow{V_{C\in R2/R1}} = \overrightarrow{V_{B\in R2/R1}} + \overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{\Omega_{R2/R1}} \end{matrix}\right\}_C$$

$$\text{et } \overrightarrow{V_{C\in R2/R1}} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{R_2} + \begin{vmatrix} -d \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{R_2} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ \dot{\beta} \\ 0 \end{vmatrix}_{R_2} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -d.\dot{\beta} \end{vmatrix}$$

$$\left\{V_{R2/R1}\right\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{R2/R1}} = \dot{\beta}.\vec{y}_{12} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B == \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{R2/R1}} \\ \overrightarrow{V_{C\in R2/R1}} \end{Bmatrix}_C == \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \dot{\beta} & 0 \\ 0 & -d.\dot{\beta} \end{Bmatrix}_{C,R_2} \quad \text{d'où } \overrightarrow{V_{C\in R2/R1}} = -d.\dot{\beta}.\vec{z}_2$$

En passant par la dérivée du vecteur position, on a trouvé : $\overrightarrow{V_{C\in R2/R1}} = \left(\frac{d\ \overrightarrow{BC}}{dt}\right)_{R1} = -d\dot{\beta}.\vec{z}_2$

7. REPONSE A LA QUESTION 2-6

$$\left\{V_{R3/R2}\right\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{R3/R2}} \\ \overrightarrow{V_{C\in R3/R2}} \end{Bmatrix}_C = \begin{Bmatrix} \dot{\gamma} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{C,R_{23}} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{R3/R2}} \\ \overrightarrow{V_{D\in R3/R2}} = \overrightarrow{V_{C\in R3/R2}} + \overrightarrow{DC} \wedge \overrightarrow{\Omega_{R3/R2}} \end{Bmatrix}_D$$

$$\text{et } \overrightarrow{V_{D\in R3/R2}} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{R_3} + \begin{vmatrix} 0 \\ -L \\ 0 \end{vmatrix}_{R_3} \wedge \begin{vmatrix} \dot{\gamma} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{R_3} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ L.\dot{\gamma} \end{vmatrix}$$

$$\left\{V_{R3/R2}\right\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{R3/R2}} \\ \overrightarrow{V_{C\in R3/R2}} \end{Bmatrix}_C = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{R3/R2}} \\ \overrightarrow{V_{D\in R3/R2}} \end{Bmatrix}_D = \begin{Bmatrix} \dot{\gamma} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & L.\dot{\gamma} \end{Bmatrix}_{D,R_3} \quad \text{d'où } \overrightarrow{V_{D\in R3/R2}} = L.\dot{\gamma}.\vec{z}_3$$

En passant par la dérivée du vecteur position, on a trouvé : $\overrightarrow{V_{D\in R3/R2}} = \left(\frac{d\ \overrightarrow{CD}}{dt}\right)_{R2} = L\dot{\gamma}.\vec{z}_3$

8. REPONSE A LA QUESTION 2-7

$$\left\{V_{R2/R1}\right\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \dot{\beta} & 0 \\ 0 & -d.\dot{\beta} \end{Bmatrix}_{C,R_2} \quad \text{et } \left\{V_{R1/R0}\right\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & h.\dot{\alpha} \\ \dot{\alpha} & 0 \end{Bmatrix}_{B,R_1} \quad \text{à transporter au point C}$$

$$\overrightarrow{V_{C\in R1/R0}} = \overrightarrow{V_{B\in R1/R0}} + \overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{\Omega_{R1/R0}} \Leftrightarrow \overrightarrow{V_{C\in R1/R0}} = \begin{vmatrix} 0 \\ h.\dot{\alpha} \\ 0 \end{vmatrix}_{R_1} + \begin{vmatrix} -d.\cos\beta \\ 0 \\ d.\sin\beta \end{vmatrix}_{R_1} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{vmatrix}_{R_1} = \begin{vmatrix} 0 \\ h.\dot{\alpha} + d.\dot{\alpha}.\cos\beta \\ 0 \end{vmatrix}_{R_1}$$

$$\left\{V_{R2/R1}\right\}=\begin{Bmatrix}0 & 0\\ \dot{\beta} & 0\\ 0 & -d.\dot{\beta}\end{Bmatrix}_{C,R_2}=\begin{Bmatrix}0 & -d.\dot{\beta}.\sin\beta\\ \dot{\beta} & 0\\ 0 & -d.\dot{\beta}.\cos\beta\end{Bmatrix}_{C,R_1} \quad \text{et} \left\{V_{R1/R0}\right\}=\begin{Bmatrix}0 & 0\\ 0 & h.\dot{\alpha}\\ \dot{\alpha} & 0\end{Bmatrix}_{B,R_1}$$

$$\boxed{\left\{V_{R2/R1}\right\}+\left\{V_{R1/R0}\right\}=\begin{Bmatrix}0 & -d.\dot{\beta}.\sin\beta\\ \dot{\beta} & 0\\ 0 & -d.\dot{\beta}.\cos\beta\end{Bmatrix}_{C,R_1}+\begin{Bmatrix}0 & 0\\ 0 & h.\dot{\alpha}+d.\dot{\alpha}.\cos\beta\\ \dot{\alpha} & 0\end{Bmatrix}_{C,R_1}=\begin{Bmatrix}0 & -d.\dot{\beta}.\sin\beta\\ \dot{\beta} & h.\dot{\alpha}+d.\dot{\alpha}.\cos\beta\\ \dot{\alpha} & -d.\dot{\beta}.\cos\beta\end{Bmatrix}_{C,R_1}}$$

En passant par la dérivée du vecteur position, on a trouvé :

$$\boxed{\overrightarrow{V_{C\in R2/R0}}=\left(\frac{d\,\overrightarrow{AC}}{dt}\right)_{R0}=h\dot{\alpha}.\vec{y}_{12}+d\left(-\dot{\beta}.\cos\beta.\vec{x}_1+\dot{\alpha}.\cos\beta.\vec{y}_{12}-.\dot{\beta}.\sin\beta.\vec{z}_{10}\right)}$$

9. REPONSE A LA QUESTION 2-8

Torseur cinématique du mouvement de S3 par rapport à S2 dans la base du repère R1

$$\boxed{\left\{V_{R3/R2}\right\}==\begin{Bmatrix}\overrightarrow{\Omega_{R3/R2}}\\ \overrightarrow{V_{D\in R3/R2}}\end{Bmatrix}_D=\begin{Bmatrix}\dot{\gamma} & 0\\ 0 & 0\\ 0 & L.\dot{\gamma}\end{Bmatrix}_{D,R_3}=\begin{Bmatrix}\dot{\gamma}.\cos\beta & L.\dot{\gamma}.\cos\gamma\sin\beta\\ 0 & -L.\dot{\gamma}.\sin\gamma\\ -\dot{\gamma}.\sin\beta & L.\dot{\gamma}.\cos\gamma.\cos\beta\end{Bmatrix}_{D,R_1}}$$

Il reste à transporter au point D, les torseurs suivants :

$$\left\{V_{R2/R1}\right\}=\begin{Bmatrix}0 & 0\\ \dot{\beta} & 0\\ 0 & -d.\dot{\beta}\end{Bmatrix}_{C,R_2} \quad \text{et} \left\{V_{R1/R0}\right\}=\begin{Bmatrix}0 & 0\\ 0 & h.\dot{\alpha}\\ \dot{\alpha} & 0\end{Bmatrix}_{B,R_1}$$

Transport du torseur $\left\{V_{R1/R0}\right\}$ en D projeté dans R1.

$$\overrightarrow{V_{D\in R1/R0}}=\overrightarrow{V_{B\in R1/R0}}+\overrightarrow{DB}\wedge\overrightarrow{\Omega_{R1/R0}}\Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{V_{D\in R1/R0}}=\left|\begin{matrix}0\\ h.\dot{\alpha}+\\ 0\end{matrix}\right._{R_1}\left|\begin{matrix}-d.\cos\beta-L.\sin\gamma\sin\beta\\ L.\cos\gamma\\ -d.\sin\beta-L.\sin\gamma.\cos\beta\end{matrix}\right._{R_1}\wedge\left|\begin{matrix}0\\ 0\\ \dot{\alpha}\end{matrix}\right._{R_1}=\left|\begin{matrix}\dot{\alpha}.L.\cos\gamma\\ h.\dot{\alpha}-d.\dot{\alpha}.\cos\beta-L.\dot{\alpha}.\sin\gamma\sin\beta\\ 0\end{matrix}\right._{R_1}$$

$$\boxed{\left\{V_{R1/R0}\right\}=\begin{Bmatrix}0 & 0\\ 0 & h.\dot{\alpha}\\ \dot{\alpha} & 0\end{Bmatrix}_{B,R_1}=\begin{Bmatrix}0 & \dot{\alpha}.L.\cos\gamma\\ 0 & h.\dot{\alpha}-d.\dot{\alpha}.\cos\beta-L.\dot{\alpha}.\sin\gamma\sin\beta\\ \dot{\alpha} & 0\end{Bmatrix}_{D,R_1}}$$

Transport du torseur $\left\{V_{R2/R1}\right\}$ en D projeté dans R1

$$\left\{V_{R2/R1}\right\}=\begin{Bmatrix}0 & 0\\ \dot{\beta} & 0\\ 0 & -d.\dot{\beta}\end{Bmatrix}_{C,R_2}=\begin{Bmatrix}0 & -d.\dot{\beta}\sin\beta\\ \dot{\beta} & 0\\ 0 & -d.\dot{\beta}\cos\beta\end{Bmatrix}_{C,R_1}$$

$$\overrightarrow{V_{D\in R2/R1}} = \overrightarrow{V_{C\in R2/R1}} + \overrightarrow{DC} \wedge \overrightarrow{\Omega_{R2/R1}} \Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{V_{D\in R2/R1}} = \begin{vmatrix} -d.\dot\beta.\sin\beta \\ 0 \\ -d.\dot\beta.\cos\beta \end{vmatrix}_{R_1} + \begin{vmatrix} -L.\sin\gamma\sin\beta \\ L.\cos\gamma \\ -L.\sin\gamma.\cos\beta \end{vmatrix}_{R_1} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ \dot\beta \\ 0 \end{vmatrix}_{R_1} = \begin{vmatrix} L.\dot\beta.\sin\gamma.\cos\beta - d.\dot\beta.\sin\beta \\ 0 \\ -L.\dot\beta.\sin\gamma\sin\beta - d.\dot\beta.\cos\beta \end{vmatrix}_{R_1}$$

$$\boxed{\left\{V_{R2/R1}\right\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \dot\beta & 0 \\ 0 & -d.\dot\beta \end{Bmatrix}_{C, R_2} = \begin{Bmatrix} 0 & L.\dot\beta.\sin\gamma.\cos\beta - d.\dot\beta.\sin\beta \\ \dot\beta & 0 \\ 0 & -L.\dot\beta.\sin\gamma\sin\beta - d.\dot\beta.\cos\beta \end{Bmatrix}_{D, R_1}}$$

On obtient :

$$\left\{V_{R3/R2}\right\} + \left\{V_{R2/R1}\right\} + \left\{V_{R1/R0}\right\} =$$

$$\begin{Bmatrix} \dot\gamma.\cos\beta & L.\dot\gamma.\cos\gamma\sin\beta \\ 0 & -L.\dot\gamma.\sin\gamma \\ -\dot\gamma.\sin\beta & L.\dot\gamma.\cos\gamma.\cos\beta \end{Bmatrix}_{D, R_1} + \begin{Bmatrix} 0 & L.\dot\beta.\sin\gamma.\cos\beta - d.\dot\beta.\sin\beta \\ \dot\beta & 0 \\ 0 & -L.\dot\beta.\sin\gamma\sin\beta - d.\dot\beta.\cos\beta \end{Bmatrix}_{D, R_1} + \begin{Bmatrix} 0 & \dot\alpha.L.\cos\gamma \\ 0 & h.\dot\alpha - d.\dot\alpha.\cos\beta - L.\dot\alpha.\sin\gamma\sin\beta \\ \dot\alpha & 0 \end{Bmatrix}_{D, R_1}$$

$$\boxed{\left\{V_{R3/R0}\right\} = \begin{Bmatrix} \dot\gamma.\cos\beta & L.\dot\gamma.\cos\gamma\sin\beta + L.\dot\beta.\sin\gamma.\cos\beta + \dot\alpha.L.\cos\gamma \\ \dot\beta & -L.\dot\gamma.\sin\gamma + h.\dot\alpha - d.\dot\alpha.\cos\beta - L.\dot\alpha.\sin\gamma\sin\beta \\ \dot\alpha - \dot\gamma.\sin\beta & L.\dot\gamma.\cos\gamma.\cos\beta - L.\dot\beta.\sin\gamma\sin\beta \end{Bmatrix}_{D, R_1}}$$

En passant par la dérivée du vecteur position, on a trouvé :

$$\boxed{\overrightarrow{V_{D\in R2/R0}} = \left(\frac{d\,\overrightarrow{AD}}{dt}\right)_{R0} = +\left(d.\dot\beta.\cos\beta - \dot\beta L\sin\beta\right)\vec{x_1} + \left(h\dot\alpha + d.\dot\alpha.\cos\beta + L\left(\dot\alpha - \dot\gamma.\sin\beta\right).\cos\beta + \dot\gamma.L.\cos\beta\sin\beta\right)\vec{y_{12}} + \left(-d.\dot\beta.\sin\beta + \dot\beta L\cos\beta\right).\vec{z_{10}}}$$